

Comparação dos Resultados de Diferentes Métodos de Análise Probabilística da Estabilidade de uma Barragem Hipotética de Rejeitos

Caio Felipe Barbosa Lacerda

Engenheiro Geotécnico, Pimenta de Ávila Consultoria, Nova Lima – MG, Brasil

caio.lacerda@pimentadeavila.com.br

Guilherme Henrique da Silva Pinto

M.Sc. Engenheiro Geotécnico, Pimenta de Ávila Consultoria, Nova Lima – MG, Brasil

guilherme.henrique@pimentadeavila.com.br

Lúcio Flávio de Souza Villar

D.Sc. Professor, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte – MG, Brasil

lvillar@etg.ufmg.br

RESUMO: Após os desastres de Mariana (2015) e Brumadinho (2019), a segurança de barragens de rejeitos ganhou destaque nacional e global, ressaltando a necessidade de avaliações detalhadas da estabilidade dessas estruturas. Métodos determinísticos, que calculam um único fator de segurança, são amplamente utilizados, mas não consideram a variabilidade natural e intrínseca dos parâmetros do solo e rejeitos, podendo subestimar riscos associados. Para superar essa limitação, métodos probabilísticos têm sido empregados, incorporando a distribuição dos parâmetros geotécnicos e permitindo estimar a probabilidade de falha da estrutura. Dessa forma, este estudo analisou três métodos probabilísticos de estabilidade de taludes, sendo: i) Monte Carlo; ii) FOSM (*First Order Second Moment*); e iii) PEM (*Point Estimate Method*). Como resultado, foram obtidas a probabilidade de ruptura de uma estrutura hipotética e as curvas de distribuição do fator de segurança para cada método, permitindo comparar as metodologias aplicada e os resultados obtidos. O trabalho mostrou que mesmo para as barragens de mineração que atendam o critério normativo atual como a NBR 13.028 (ABNT, 2024), considerando o fator de segurança determinístico, as análises de estabilidade probabilísticas e a investigação das probabilidades de falha elaboradas podem complementar a avaliação da condição de segurança e devem ser consideradas.

PALAVRAS-CHAVE: Análise Probabilística. Barragem de Rejeitos. Monte Carlo. FOSM. PEM. Rosenblueth. Estabilidade de Taludes.

ABSTRACT: After the disasters of Mariana (2015) and Brumadinho (2019), the safety of tailings dams has gained national and global prominence, emphasizing the need for detailed assessments of these structures' stability. Deterministic methods, which calculate a single safety factor, are widely used but do not account for the natural variability and intrinsic parameters of soil and tailings, potentially underestimating associated risks. To overcome this limitation, probabilistic methods have been employed, incorporating the distribution of geotechnical parameters and allowing estimation of the structure's failure probability. Thus, this study analyzed three probabilistic slope stability methods: i) Monte Carlo; ii) FOSM (*First Order Second Moment*); and iii) PEM (*Point Estimate Method*). As a result, the study obtained the probability of failure for a hypothetical structure and the distribution curves of the safety factor for each method, enabling comparison of the applied methodologies and the results obtained. The work demonstrated that even for mining dams compliant with current regulatory criteria such as NBR 13.028 (ABNT, 2024), deterministic safety factor analyses, probabilistic stability analyses, and developed failure probabilities can complement safety condition assessments and should be considered.

KEYWORDS: Probabilistic Analysis. Tailings Dam. Monte Carlo. FOSM. PEM. Rosenblueth. Slope Stability

Figura 1. Combinação das possibilidades de arranjo com N variáveis (PIMENTEL *et al.*, 2017).

Após a determinação das 2n combinações a serem feitas dos parâmetros a serem variados, a mesma quantidade de análises determinísticas deve ser realizada, a fim de considerar cada caso de variação do parâmetro. Como resultado, cada análise fornecerá um F.S. associado a variação do parâmetro, os quais agrupados, fornecem a média e desvio padrão dos Fatores de Segurança. Tais dados servem para ajustar uma função de distribuição, que auxilia na definição da probabilidade de ruptura da estrutura, ou seja, o percentual de casos em que o $F.S. < 1,00$ (PIMENTEL *et al.*, 2017).

2.2 Método da Primeira Ordem e Primeiro Momento (1975)

No Método da Primeira Ordem e Segundo Momento (FOSM), proposto por Rosenblueth (1975), considera-se a aproximação de primeira ordem da expansão da série de Taylor aplicada a equação do segundo momento estatístico (variância) (ASSIS, 2020). Segundo Pimentel *et al.* (2017), para a determinação da variância ($V[FS]$) da função desempenho (neste caso o F.S.), os valores médios das variáveis aleatórias adotadas (\bar{x}_i) são utilizados na Equação 1, em que $V[x_i]$ é a variância dos parâmetros de entrada.

$$V[FS] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)^2 \times V[x_i] \quad (1)$$

Este método possui uma funcionalidade especial, que faz com que seja possível avaliar as porcentagens de influência de cada parâmetro de entrada no F.S. por meio da razão entre as variâncias das variáveis aleatórias pela totalidade do somatório das variâncias. Dessa forma, estima-se o percentual de impacto de cada parâmetro no valor final obtido, permitindo entender quais são as variáveis de maior importância para o problema (PIMENTEL *et al.*, 2017).

O maior empecilho para o método FOSM é encontrar o resultado das derivadas parciais ($\partial F_i / \partial x_i$), que podem ser de difícil definição ou podem, simplesmente, não serem matematicamente definidas (ASSIS, 2020). A fim de contornar esse problema, Christian *et al.* (1992), apresentaram uma aproximação numérica, substituindo a necessidade de utilizar as derivadas parciais aplicando uma taxa de variação às variáveis aleatórias adotadas, independentemente. Para isso, Assis (2020) apresenta uma formulação considerando a variação nos parâmetros, presente na Equação 2. Nesta, a variável FS_i é o novo valor de F.S. considerando a variação no parâmetro o valor de \bar{FS} é o valor médio de F.S. e Δx_i é a variável aleatória com o acréscimo pré-determinado.

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{FS_i - \bar{FS}}{\Delta x_i} \quad (2)$$

Segundo Assis (2020), a taxa de 10% é uma boa aproximação de taxa de acréscimo de cada variável para a aplicação do método ($\Delta x_i = \Delta 10\%$ do valor de x_i). Porém, conforme indicado pelo próprio autor, poderia ser adotado qualquer outro valor de acréscimo, exceto casos de variações extremamente pequenas ou extremamente grandes, que poderiam gerar erros e/ou instabilidade numéricas.

2.3 Método de Monte Carlo (1987)

O método de Monte Carlo (1987), um dos principais métodos probabilísticos aplicados na Geotecnia, busca encontrar uma solução que descreva o comportamento da função de densidade de probabilidade por meio da geração de valores aleatórios dos parâmetros de interesse (PIMENTEL, et al., 2017). Matta Machado e Villar (2020) descrevem que para aplicação deste método é necessário ter uma série de dados que seja o suficiente para estimar as funções de distribuição de probabilidade dos parâmetros de resistência, ou seja, é aconselhável que existam dados abundantes de campanhas de ensaios de laboratório e/ou de campo para tratar os dados estatisticamente.

Segundo Góis e Assis (2022), a solução proposta pelo método de Monte Carlo (1987) pode ser considerada exata à medida que o número de interações realizadas tende ao infinito. Entretanto, o esforço computacional requerido para realização de tamanha quantidade de interações tornaria o método inviável. Assis (2020) apresenta a Equação 3, que tem como objetivo estimar a quantidade de interações necessárias no Método de Monte Carlo (1987), resultando em números de grande ordem.

$$N = \left(\frac{Z_{\alpha/2}^2}{4\alpha^2} \right)^n \quad (3)$$

Onde: N = Número de simulações assumindo um erro de α nos resultados; $Z_{\alpha/2}$ = Número de desvios padrões necessários para chegar a um erro $\alpha/2$ no limite da curva de distribuição; n = Número de variáveis de entrada.

De maneira a reduzir a quantidade de interações a serem feitas, é possível avaliar a convergência dos dados de fator de segurança por meio de softwares de análises de estabilidade com uma quantidade menor de interações a fim de propor uma solução que seja viável e matematicamente com convergência. Apaza e Barros (2014) utilizaram da curva de convergência do fator de segurança obtida por análise via software para realizar a verificação proposta anteriormente, sendo obtido, pelos autores, menores iterações do que o necessário pela Equação 3 para a convergência do problema.

É importante ressaltar que, nos programas de modelagem numérica comumente empregados, o método de Monte Carlo pode ser aplicado de duas maneiras. Uma, mais simples, fixa-se a cunha de ruptura e varia-se os parâmetros de entrada (*Global Minimum*). E outra, que exige maior esforço computacional, na qual são variados os dados de entrada, e cada cunha de ruptura é recalculada (*Overall Slope*) a partir da combinação de parâmetro utilizada (CAMPELLO, 2020). Segundo Campello (2020), ao utilizar a alternativa de maior esforço computacional há uma maior confiabilidade nos dados, visto que as cunhas de ruptura são recalculadas para cada uma das combinações dos parâmetros de resistência.

Após a obtenção dos dados de F.S. por meio do software, a média e desvio padrão dos dados são utilizadas para definir a distribuição de probabilidade, requisito para calcular a área que contempla os valores menores do que 1 (condição de ruptura). Essa área será a probabilidade de falha definida pelo método.

3 METODOLOGIA DE ANÁLISE

Para este estudo, foi arbitrada uma seção transversal de uma barragem de rejeitos de minério de ferro hipotética e materiais considerados homogêneos, cuja representação e medidas são indicadas na Figura 2. Na construção da seção, alguns valores que consideram as boas práticas da engenharia similar ao trabalho de Matta e Villar (2020) foram considerados, como a altura entre bermas igual a 10 m e inclinação dos taludes de, no máximo, 1,0V:1,5H. Os materiais adotados foram um solo de fundação de solo residual de filito siltoso e solo de aterro siltoso compactado assim como o próprio rejeito e material arenoso para compor o sistema de drenagem, típicos do contexto do Quadrilátero Ferrífero mineiro.

Sobre a condição da linha freática da análise adotada, prezou-se por definir que haverá bom funcionamento do filtro vertical da seção, de maneira que a linha d'água passará por dentro da estrutura de drenagem. Além disso, também foi considerado que o rejeito estará completamente saturado, a fim de que a entrada linha freática seja coincidente com a superfície do reservatório.

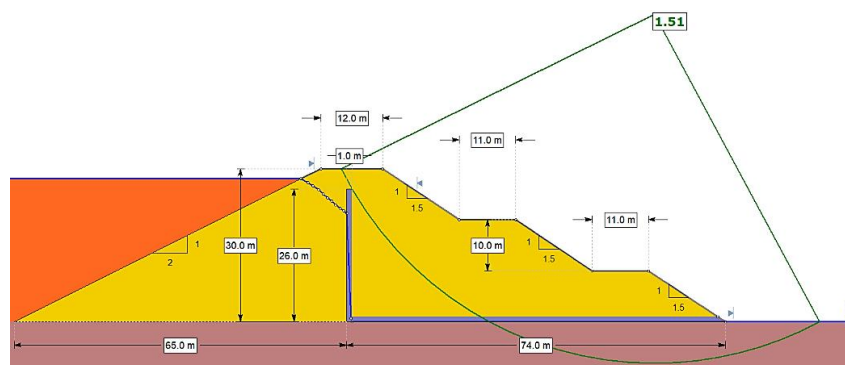


Figura 2. Seção geológico-geotécnica adotada para as análises de estabilidade e cunha crítica.

Foram disponibilizados dados de ensaios triaxiais CIU e CID do solo de aterro e de fundação a partir de uma campanha de investigações, de forma que os parâmetros de resistência destes foram considerados como variáveis aleatórias nas análises probabilísticas deste trabalho. Tendo em vista a confidencialidade dos dados, a origem dos mesmos não será mencionada. A Tabela 1 apresenta os valores médios (μ) e desvio padrão (σ), quando aplicável, dos parâmetros adotados para as simulações numéricas.

Tabela 1. Resumo dos parâmetro de resistência adotados.

Material	Cor	γ (kN/m ³)	c' (kPa)	ϕ' (°)
Aterro		18,7	$\mu = 10; \sigma = 3,1$	$\mu = 24; \sigma = 3,0$
Fundação		19,2	$\mu = 21; \sigma = 3,2$	$\mu = 22; \sigma = 3,4$
Rejeito		22,5	0	26
Dreno		21	0	35

Para a elaboração das análises de estabilidade, seja ela determinística ou probabilística, foi utilizado o programa Slide2 da empresa Rocscience, versão 9.024. Para as condições de fluxo, foi adotada uma linha freática única no modelo (*water table*), indicada na Figura 2, a qual determinará as poropressões do modelo numérico. Destaca-se que as análises de rede de fluxo são acopladas, de modo que o software calcula a tensão efetiva a partir das poropressões estimadas da linha freática.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Resultado do Método das Estimativas Pontuais

Primeiramente, para o método PEM, tendo em vista que os parâmetros geotécnicos de análise são quatro (ângulos de atrito e coesão efetivos do aterro compactado e solo de fundação), foi aplicado o fluxograma apresentado na Figura 1, o qual foram consideradas 16 análises de estabilidade (n igual a 4 sendo $2^4 = 16$). Os fatores de segurança provenientes das análises foram utilizados para obter tanto a média quanto o desvio padrão. A Figura 3 demonstra o esquema de cálculo utilizado, as variáveis de cada análise e os valores de F.S. obtidos para cada uma das iterações e análises realizadas. Destaca-se que a linha indicada como “controle” na Figura 3 representa o F.S. determinístico obtido a partir dos parâmetros médios, e que os sinais de “+” e “-” indicam acréscimo e decréscimo do valor propriamente dito. Em complemento, conforme indicado anteriormente, adotou-se uma variação de 1 desvio padrão para cada variável.

Análise	n				Variáveis Aleatórias				F.S.
	Coesão A.	Atrito A.	Coesão F.	Atrito F.	Coesão A.	Atrito A.	Coesão F.	Atrito F.	
1	+	-	-	-	13,0	20,9	17,8	18,5	1,30
2	+	+	-	-	13,0	27,1	17,8	18,5	1,38
3	+	-	+	-	13,0	20,9	24,2	18,5	1,37
4	+	-	-	+	13,0	20,9	17,8	25,5	1,53
5	+	+	+	-	13,0	27,1	24,2	18,5	1,45
6	+	+	-	+	13,0	27,1	17,8	25,5	1,70
7	+	-	+	+	13,0	20,9	24,2	25,5	1,58
8	-	+	+	+	7,0	27,1	24,2	25,5	1,73
9	-	-	+	+	7,0	20,9	24,2	25,5	1,45
10	-	-	-	+	7,0	20,9	17,8	25,5	1,41
11	-	+	-	-	7,0	27,1	17,8	18,5	1,37
12	-	-	+	-	7,0	20,9	24,2	18,5	1,34
13	-	-	-	+	7,0	20,9	17,8	25,5	1,41
14	-	+	+	-	7,0	27,1	24,2	18,5	1,43
15	+	+	+	+	13,0	27,1	24,2	25,5	1,76
16	-	-	-	-	7,0	20,9	17,8	18,5	1,27
Controle	0	0	0	0	10	24	21	22	1,51

Figura 3. Esquema de cálculo das variáveis aleatórias e Fatores de Segurança (PEM).

Com os 16 (dezesseis) fatores de segurança obtidos, foi possível aproximar uma curva de distribuição normal por meio da média e desvio padrão dos valores. Destaca-se que o valor de F.S. médio obtido foi de 1,47 ($\mu = 1,47$) e o desvio padrão associado de 0,15 ($\sigma = 0,15$). A probabilidade de ruptura encontrada é aproximadamente 0,097% para o método de Rosenblueth (1975) conforme detalhado no item 4.4.

4.2 Resultado do Método da Primeira Ordem e Primeiro Momento

Já para o FOSM, adotou-se um incremento de 10% para a variação de cada parâmetro geotécnico, assim como Matta Machado e Villar (2022). A fim de se estimar as derivadas parciais, foram realizadas quatro análises de estabilidade determinísticas, utilizando a taxa de variação escolhida. Dessa forma, foi empregada



a Equação 2, para posteriormente calcular $V[FS]$ com a Equação 1. Os resultados obtidos são indicados na Figura 4, sendo que a linha indicada como “controle” contém os parâmetros médios conforme indicado na Tabela 1. A partir dos resultados obtidos, são indicados, na Tabela 2, os demais cálculos do Método de FOSM.

Análise	Coesão A.	Atrito A.	Coesão F.	Atrito F.	Coesão A.	Atrito A.	Coesão F.	Atrito F.	F.S.
1	+10%	-	-	-	11,0	24	21	22	1,52
2	-	+10%	-	-	10	26,4	21	22	1,55
3	-	-	+10%	-	10	24	23,1	22	1,54
4	-	-	-	+10%	10	24	21	24,2	1,60
Controle	-	-	-	-	10	24	21	22	1,51

Figura 4. Esquema de cálculo das variáveis aleatórias e Fatores de Segurança (FOSM).

Tabela 2. Produtos do método FOSM.

Parâmetro	$\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$	$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)^2 \times V[X_i]$	Contribuição	$V[FS]$	$\sigma[FS]$
c' Aterro +10%	0,01	0,0010	3,73%	0,026	0,161
Φ' Aterro +10%	0,016667	0,0025	9,77%		
c' Fund.+10%	0,014286	0,0021	8,09%		
Φ' Fund. +10%	0,040909	0,0204	78,41%		

Ao analisar os dados obtidos, é possível perceber que o ângulo de atrito da fundação possui quase 80% de contribuição para o F.S., ou seja, é o parâmetro mais importante da análise apresentada neste estudo. A probabilidade de ruptura encontrada é aproximadamente 0,077% para o método de Rosenblueth (1975), a qual foi obtida por uma distribuição normal, conforme indicado na Tabela 2. Maiores detalhes são apresentados no item 4.4.

4.3 Resultado do Método de Monte Carlo

Por último, para a aplicação do Método de Monte Carlo (Metropolis, 1986), primeiramente, utilizou-se a Equação 3, para calcular o número mínimo de interações necessárias, segundo Assis (2020), sendo obtido um resultado igual a $6,651 \times 10^{11}$. Porém, uma vez que esse número exigiria um esforço computacional muito grande, foram avaliadas quantidades de interações menores desde que fosse satisfeita a convergência do fator de segurança. A Figura 5 ilustra a convergência do F.S. considerando uma simulação com 100.000 iterações. No eixo das abscissas há a quantidade de interações e, no eixo das ordenadas, o fator de segurança encontrado. É possível observar que, a partir de aproximadamente 20.000 interações, o F.S. convergiu para 1,48, sem diferenças significativas no valor obtido com a adição de mais iterações. Dessa forma, a quantidade de iterações utilizadas neste estudo atendeu a convergência do método apesar de ser menor do que a indicação matemática.

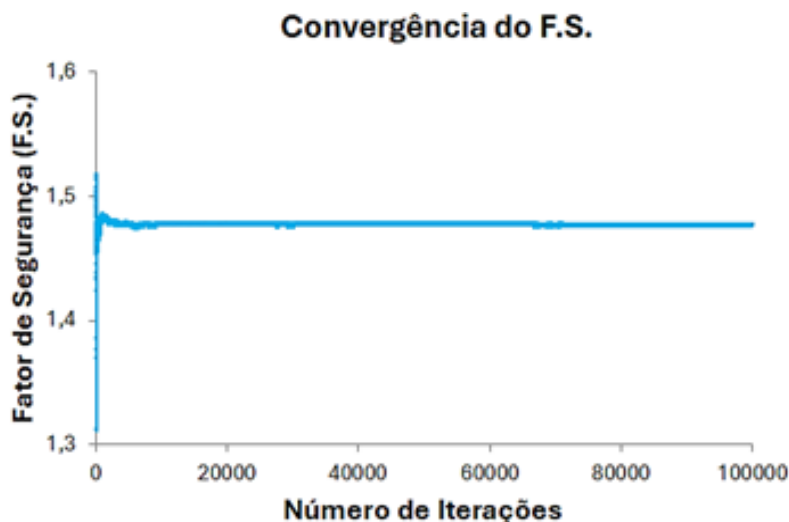


Figura 5. Gráfico de convergência dos dados de Fator de Segurança pelo Método de Monte Carlo.

Com a confirmação de que o número de interações realizados na análise eram suficientes, foi possível obter os fatores de segurança por meio do software e estimar valores de desvio padrão e média para encontrar a probabilidade de ruptura. Foi encontrado um valor de 0,012% para a probabilidade de ruptura pelo o método, sendo esta inferior aos demais métodos elaborados neste estudo.

4.4 Análise comparativa dos métodos

Ao realizar as análises probabilísticas de cada um dos métodos, considerando distribuições estatísticas do tipo normal, é possível comparar as distribuição de fatores de segurança em um só gráfico, conforme indicado na Figura 6. Destaca-se que distribuições normais são amplamente utilizadas e frequentemente são atribuídas às análises que envolvem parâmetros geotécnicos como coesão e ângulo de atrito (Assis, 2020). Em complemento, a Tabela 3 contém as probabilidades de falha de cada um dos métodos probabilísticos analisados neste estudo.

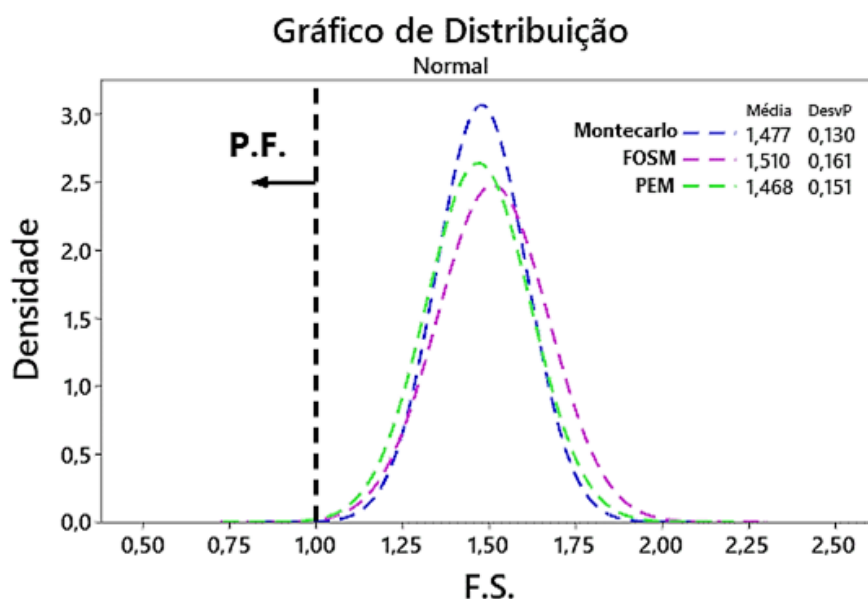


Figura 6. Análise comparativa das distribuições de F.S. pelas Metodologias.

Tabela 3. Probabilidades de falha obtidas.

Método	F.S. probabilístico médio	Desvio padrão do F.S.	Probabilidade de falha
Monte Carlo	1,48	0,13	0,012%
FOSM	1,51*	0,16	0,078%
Rosenblueth	1,47	0,15	0,097%

* Fator de segurança determinístico calculado com os parâmetros médios.

Analisando os dados obtidos, nota-se que o F.S. probabilístico médio do método de Monte Carlo foi intermediário aos demais métodos analisados e apresentou o menor desvio padrão de F.S., o que resultou numa menor probabilidade de falha. Já o método de Rosenblueth (1975) apresentou a maior probabilidade de falha, o que está associado ao menor F.S. probabilístico médio e um dos maiores desvio padrão de F.S. O método do FOSM chegou ao maior valor de F.S. probabilístico médio e maior desvio padrão do F.S., o que resultou numa probabilidade de falha intermediária se comparado aos demais métodos.

Considerando os resultados obtidos neste estudo, é possível afirmar que os métodos de Rosenblueth (1975) e FOSM são mais conservadores quando comparados ao de Monte Carlo, já que apresentaram valores maiores de probabilidade de ruptura. Essa diferença está em concordância com os resultados estimados por Pimentel *et al.* (2017) e Góis e Assis (2020).

De forma complementar, Whitman (1984) indica que o limite aceitável para a probabilidade de ruptura de uma barragem de rejeitos seria da ordem de 10^{-6} , sendo este muito inferior ao obtido neste estudo. Dessa maneira, ao analisar os resultados obtidos com as análises probabilísticas propostas nesse trabalho, é possível observar que em nenhum dos métodos foram observados valores dessa ordem, ou seja, todas as probabilidades



de falha encontradas foram consideradas não aceitáveis. Por fim, destaca-se que os F.S. para a condição determinística se mostraram similares, da ordem de 1,50.

5 CONCLUSÕES

Por meio dos dados apresentados, constata-se que métodos determinísticos de análise de estabilidade de taludes podem apresentar certas limitações por não conseguirem abranger a variabilidade natural dos parâmetros do solo. Devido a isso, a consideração da variabilidade dos parâmetros geotécnicos presente nas análises de estabilidade probabilísticas é de suma importância para complemento de uma avaliação da condição de segurança de estruturas geotécnicas, em especial barragens de mineração.

No que tange a metodologia adotada, no método de Monte Carlo foi observado que a quantidade de iterações necessária para a convergência das simulações do F.S. é substancialmente menor que o cálculo rigoroso da Equação 3 (Assis, 2020). Assim, em estudos futuros, a utilização de menos iterações pode ser considerada, desde que avaliada a convergência. Em complemento, o método de Rosenblueth (1975) indicou a maior probabilidade de falha se comparado aos demais.

Por fim, o trabalho apresentado denotou que, mesmo barragens de mineração que atendam o critério normativo atual como a NBR 13.028 (ABNT, 2024), considerando o fator de segurança determinístico, as análises de estabilidade probabilísticas e a investigação das probabilidades de falha podem complementar a avaliação da condição de segurança.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Apaza, M. A. F., Barros, J. M. C. (2014) Análise probabilística de estabilidade de taludes pelo método de Monte Carlo. In: Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas (2024). Mineração – Elaboração e apresentação de projeto de barragens para disposição de rejeitos, contenção de sedimentos e reservação de água – requisitos. Rio de Janeiro.
- Assis, A. P. (2020) Risk management for geotechnical structures: consolidating theory into practice. *Soils and Rocks*, 43 (3), p. 311-336.
- Campello, I. C. (2020) Abordagem probabilística aplicada ao estudo da variabilidade geotécnica dos solos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 158 p.
- Christian, J. T., Ladd, C. C., Baecher, G. B. (1992) Reliability applied to slope stability analysis. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 120 (12), p. 2180-2207.
- Góis, F. M. B. M., Assis, A. P. (2020) Análise probabilística de estabilidade de taludes - barragem no estado de Minas Gerais. In: Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica.
- Harr, M. E. (1987) Reliability-based design in civil engineering. McGraw-Hill, New York, 291 p.
- Matta Machado, J. L., Villar, L. S. (2020) Análise probabilística de estabilidade do talude de jusante de uma barragem de rejeitos de minério de ferro. In: Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica.
- Metropolis, N. (1987) The beginning of Monte Carlo method. *Los Alamos Science Special Issue*, p. 125-130.
- Pimentel, K. C. A., Souza, T. C., Campello, I. C., Silva, P. H. A. (2017) Avaliação dos métodos probabilísticos aplicados à estabilidade de taludes de barragens. In: Comitê Brasileiro de Barragens, XXXI Seminário Nacional de Grandes Barragens – SNGB, Belo Horizonte.
- Rosenblueth, R. Y. (1975) Point estimates for probability moments. *Proceedings of the National Academy of Sciences, Mathematics Section*, 72 (10), p. 3812-3814.
- Whitman, R. V. (1984) Evaluating calculated risk in geotechnical engineering. *Journal of Geotechnical Engineering*, 110 (2), p. 143-188.