



Talude Próximo à Ruptura: Correlações Espaço-Temporais de Longo Alcance Descritas por Funções Matemáticas q-deformadas

Karen Souza Ferreira

Engenheira, Sondotécnica, Engenharia de Solos SA, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, karensouzald@gmail.com.

Kessylyn Nogueira Ramos

Mestranda, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, kessylyn.nogueira@gmail.com.

Gabriel Ramalho Saguias da Silva

Engenheiro, Geoprojetos Engenharia Ltda, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, grsaguias@gmail.com.

Armando Prestes de Menezes Filho

Professor, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, armando.prestes.filho@uerj.br.

RESUMO: Funções matemáticas generalizadas vêm sendo utilizadas no estudo dos sistemas complexos adaptativos, especialmente as funções q-deformadas, funções parametrizadas por um parâmetro $q \neq 1$, que possibilitam lidar com correlações de longo alcance espacial e/ou temporal, já que se comportam assintoticamente como leis de potência. Quando o parâmetro deformacional $q \rightarrow 1$, as funções generalizadas restituem as funções matemáticas habituais. Em um talude de material elasto-plástico muito próximo da ruptura, que obedece ao critério de plastificação de Mohr-Coulomb, os deslocamentos horizontais de dois pares de pontos foram obtidos por simulações numéricas com o software PLAXIS e analisados quanto às suas correlações espaço-temporais. O primeiro par foi localizado na região instável (ambos na face do talude), e o segundo, com pontos na face e no interior da massa de solo, em uma zona estável, distante da região de instabilização. Os resultados indicam a presença de correlações de longo alcance temporais para os dois pares de pontos, descritas por funções q-exponenciais estendidas, com $q \neq 1$. Na engenharia, esse tipo de modelagem pode auxiliar na previsão de comportamentos críticos em taludes e encostas, apoiando sistemas de monitoramento e estratégias de mitigação de riscos. Assim, taludes próximos à ruptura podem apresentar fortes correlações espaço-temporais entre os pontos, tornando-os frágeis e susceptíveis a pequenas perturbações internas ou externas.

PALAVRAS-CHAVE: Estabilidade de Taludes, Sistemas Complexos Adaptativos, Funções Generalizadas q-Deformadas, Correlações de Longo Alcance.

ABSTRACT: Generalised mathematical functions have been employed in the study of complex adaptive systems, particularly q-deformed functions, which are parameterised by $q \neq 1$ and allow for the treatment of long-range spatial and/or temporal correlations, as they behave asymptotically like power laws. When the deformation parameter tends to unity $q \rightarrow 1$, these functions reduce to conventional mathematical functions.

In a slope composed of an elasto-plastic material and approaching failure, governed by the Mohr–Coulomb yield criterion, the horizontal displacements of two pairs of points were obtained through numerical simulations using the PLAXIS software and analysed with respect to their spatial-temporal correlations. The first pair was located within the unstable region (both on the slope face), and the second consisted of one point on the slope face and another within the soil mass, in a stable zone away from the destabilised area.

The results indicate the presence of long-range temporal correlations for both point pairs, described by extended q-exponential functions with $q \neq 1$. In geotechnical engineering, this type of modelling can assist in predicting critical behaviours in slopes and embankments, supporting monitoring systems and risk mitigation strategies. Thus, slopes approaching failure may exhibit strong spatial-temporal correlations between points, rendering them fragile and highly susceptible to minor internal or external disturbances.

KEYWORDS: Slope Stability, Complex Adaptive Systems, q-Deformed Generalised Functions, Long-Range Correlations.



1 INTRODUÇÃO

Fenômenos de movimentação de massa em encostas naturais são ocorrências geológico-geotécnicas de grande importância, em função das consequências catastróficas que ocasionam e a perdas de vidas humanas.

Este artigo analisa a instabilidade de encostas sob a ótica da teoria dos sistemas complexos adaptativos, que se caracterizam pela presença de interações de longo alcance entre seus elementos. O estudo considera um talude homogêneo e isotrópico, com comportamento elasto-plástico e critério de resistência de Mohr-Coulomb, em condições drenadas e próximo da ruptura. Foram avaliados os deslocamentos horizontais de dois pares de pontos: um localizado na região instável do talude e outro em uma área mais estável, visando a identificação de interações temporais de longo alcance.

Assim, a evolução destas correlações foi investigada por meio de gráficos de correlação temporal (correlogramas), ajustados com funções matemáticas q-deformadas, em especial as funções q-exponenciais estendidas.

2 SISTEMAS COMPLEXOS E FUNÇÕES q-DEFORMADAS

2.1 Sistemas Complexos

Os sistemas complexos adaptativos são sistemas dinâmicos que apresentam as seguintes características (Tsallis, 2023):

- Correlações espaço-temporais de longo alcance;
- Exponente de Lyapunov (λ) máximo positivo tendendo a zero, caracterizando divergência em lei de potência (muito lenta) entre duas trajetórias inicialmente muito próximas;
- Sistemas fracamente caóticos;
- Regidos por Estatísticas q-Gaussianas (não-Gaussianas, em Lei de Potência);
- Leis evolutivas em Lei de Potência.

Leis evolutivas em lei de potência são características destes sistemas, posto que expressam matematicamente uma invariância de escala temporal (Nussenzveig, 1999). Assim, a expressão (1) abaixo tem sido utilizada em sistemas que apresentam dinâmica de limiar (Sornette, 1998, 2003), e, no caso de taludes, na evolução de seus deslocamentos horizontais (Fukuzono, 1985; Silva, 2023), ou seja:

$$y = A + B \cdot (t_c - t)^\alpha \quad (1)$$

onde,

y – deslocamento horizontal de um dado ponto de interesse

t_c – tempo de ruptura do talude (parâmetro de ajuste)

t – tempo corrente

A, B e α – parâmetros de ajuste

2.2 Funções Matemáticas q-deformadas

As funções generalizadas q-deformadas surgem no âmbito das formas entrópicas generalizadas, a de Tsallis sendo a mais conhecida (Tsallis, 1988, 2023).

A função que otimiza a entropia de Tsallis é a função q-exponencial generalizada, mostrada abaixo (Tsallis, 2023):

$$\exp_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \quad (2)$$

que restitui a função exponencial clássica quando $q \rightarrow 1$. A expressão (2) é, na verdade, uma função em lei de potência assintótica, i.e., $\exp_q(x) \rightarrow x^{\frac{1}{1-q}}$ para valores muito grandes do argumento x (Menezes Filho, 2003). A função q-exponencial acima pode ser escrita mais generalizadamente como



2 0 2 5

$$y = a[\exp_q \left(-\frac{x}{b}\right)^\beta = a[1 - (1-q)\left(\frac{x}{b}\right)^\beta]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3)$$

denominada função q-exponencial estendida e utilizada neste trabalho (para $\beta=2$, a função (3) chama-se q-gaussiana). Mais particularmente, os correogramas seriais amostrais dos deslocamentos horizontais dos pontos selecionados do talude foram ajustados pela expressão (3), como se verá adiante.

3 METODOLOGIA ADOTADA

Os deslocamentos horizontais dos pontos escolhidos foram gerados pelo programa PLAXIS 2D (Brinkgreve, 2002), em análises utilizando o critério de plastificação de Mohr-Coulomb, em um modelo elasto-plástico perfeito.

Os parâmetros utilizados nas simulações estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do material e demais variáveis de entrada do modelo

Parâmetro	Adotado no modelo
Angulação do talude (θ)	40°
Tipo de análise	Drenada
Peso específico ($\gamma_{sat} = \gamma_{unsat}$)	19,0 kN/m ³
Módulo de Young (E_{ref})	30 MPa
Coeficiente de Poisson (v)	0,3
Coesão (c)	8,0 kPa
Ângulo de atrito (ϕ)	30°
Sobrecarga (q)	10 kPa

A Figura 1 mostra o domínio de estudo das análises numéricas, em que um talude hipotético seco é sujeito a uma carga uniformemente distribuída, localizada na superfície superior horizontal do talude de modo a colocá-lo muito próximo da ruptura.

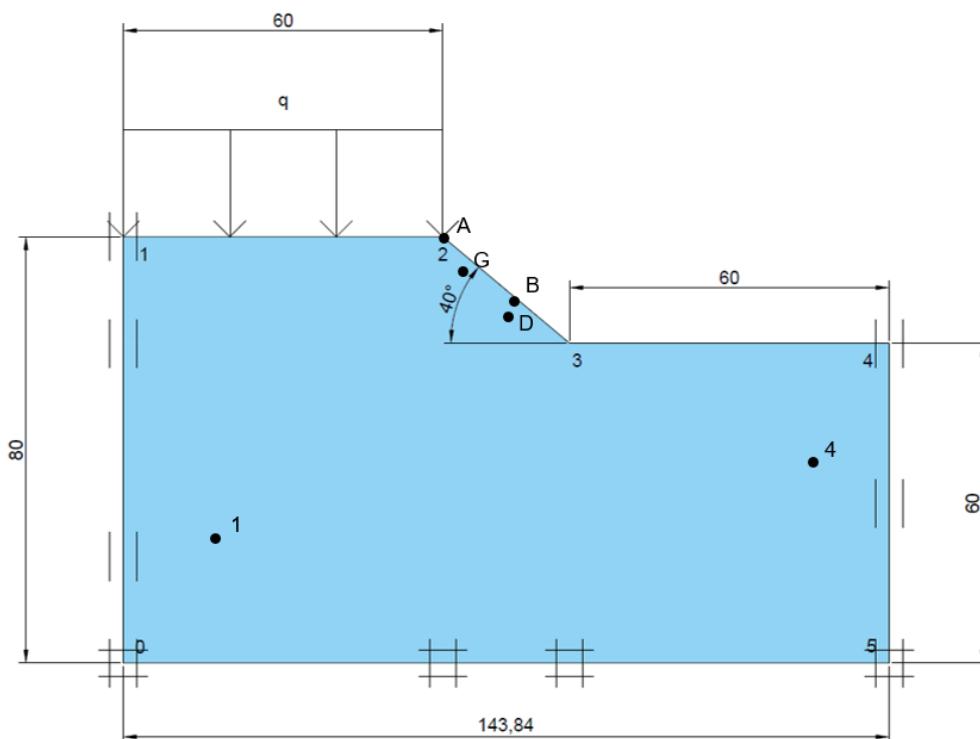


Figura 1 – Perfil do modelo adotado para as análises (medidas em metros) e a localização dos 3 pontos selecionados A, B e 1 (Ramos, 2025).



Os pontos destacados foram originalmente utilizados por Ramos (2025). Neste estudo, apenas as correlações temporais entre os pontos A e B, e A e 1 foram analisadas. A Tabela 2 apresenta as coordenadas destes três pontos no sistema de eixos XY, localizado no canto inferior esquerdo da Figura 1.

Tabela 2 – Coordenadas dos três pontos selecionados (adaptado de Ramos, 2025).

Ponto	Coord. X	Coord. Y
A	60,00	80,00
B	71,92	70,00
1	21,47	32,22

As Figuras 2 mostram a evolução dos deslocamentos horizontais dos pontos A, B e 1 (Ramos, 2025).

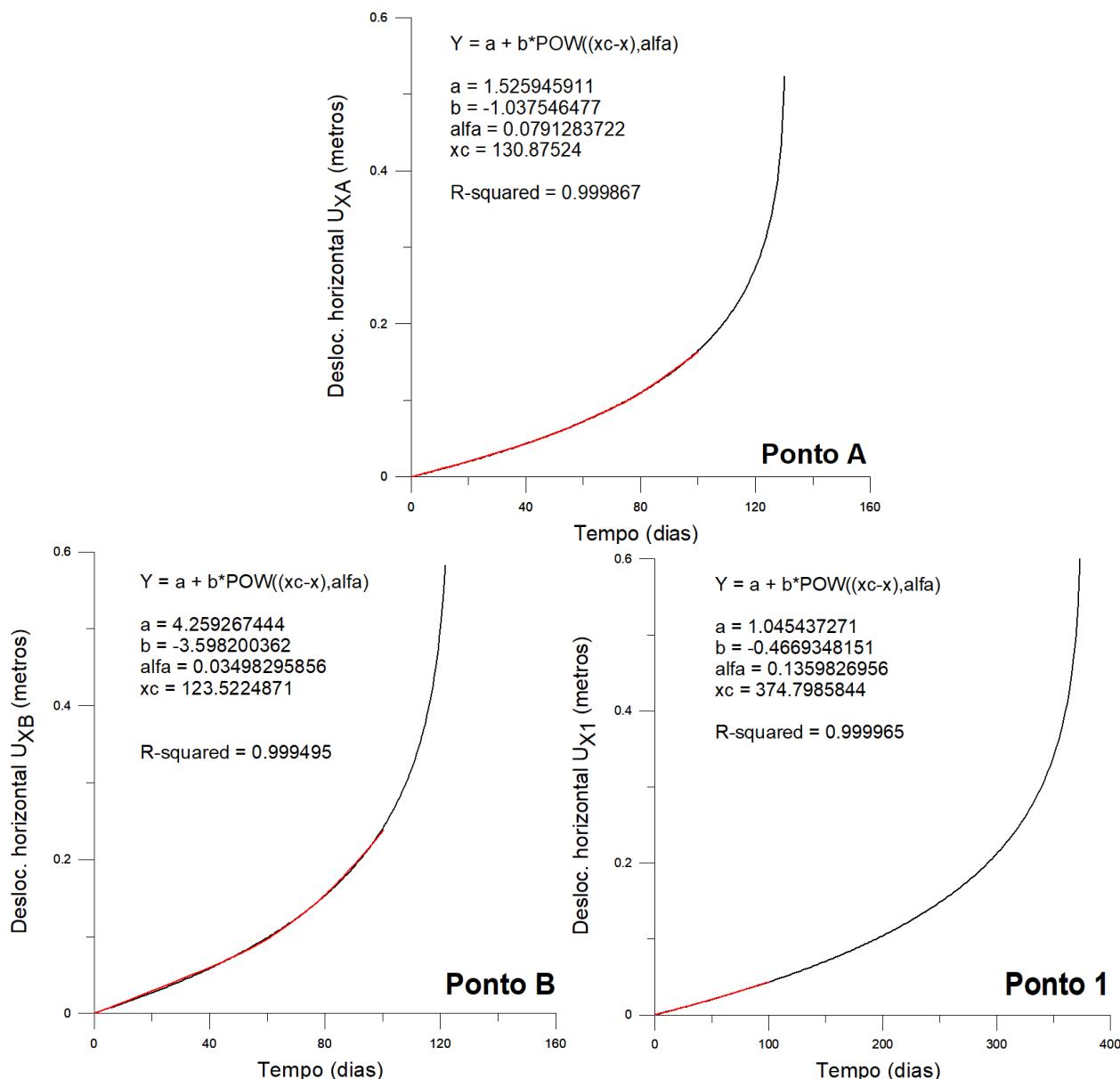


Figura 2 – Séries temporais dos deslocamentos horizontais dos pontos A, B e 1 (Ramos, 2025)

O trecho em vermelho refere-se ao produzido originalmente pelo programa (simulações efetuadas até 100 dias), ao passo que o trecho preto, extrapolado do original até a ruptura, foi construído utilizando-se a expressão em lei de potência 1 (ver inserção nas Figuras). A Tabela 3 mostra o resultado dos ajustes em lei de



potência (expressão 1) para a evolução temporal dos deslocamentos dos pontos A, B e 1 ilustrados na Figura 2 (Silva, 2023).

Tabela 3 – Parâmetros dos ajustes pela expressão (1) às séries temporais dos pontos A, B e 1 (Silva, 2023).

Ponto	A	B	α	t_c	R^2
A	1,5260	-1,0376	0,0791	130,8753	0,999867
B	4,2592	-3,5981	0,0350	123,5225	0,999495
1	1,0454	-0,4669	0,1360	374,7986	0,999965

A extrapolação dos dados efetuados com a expressão (1) possibilitou alcançar a ruptura dos pontos analisados, indo até onde o programa não conseguiu atingir. Para isso, foi realizada uma análise de segurança – uma função opcional do programa – em que os parâmetros de resistência foram reduzidos até atingir um fator de segurança de 1,014. Portanto, a julgar pelos resultados apresentados anteriormente, o modelo numérico não chegou a atingir efetivamente a ruptura global do talude.

As correlações entre as séries temporais dos deslocamentos horizontais dos 3 pontos escolhidos foram determinadas por meio de correlogramas seriais amostrais. Mais especificamente, considerando uma série temporal dos deslocamentos horizontais de um par de pontos (U e V), separados por um intervalo de tempo k, pode-se estimar a correlação serial amostral de lag k (R_k) pela seguinte expressão (Moretin e Toloi, 2018):

$$R_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k}(U_t - \bar{U})(V_{t+k} - \bar{V})}{\sqrt{\sum_{t=1}^N(U_t - \bar{U})^2 \sum_{t=1}^N(V_t - \bar{V})^2}} \quad (4)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, e \bar{U} e \bar{V} são as médias temporais.

O gráfico de R_k em função de k é chamado Correlograma Serial Amostral, bastando representar R_k para $k \geq 0$.

4 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

4.1 Pontos Selecionados e Respectivos Tempos de Análise

Esta sessão apresenta as correlações temporais dos pontos A, B e 1, tomados da seguinte forma e para os seguintes tempos de análise:

- **Pontos A e B:** 100 dias, 120 dias e 123,52 dias (este último é o tempo de ruptura do ponto B);
- **Pontos A e 1:** 100 dias, 120 dias, 123,52 dias, 125 dias e 130,87 dias (este último é o tempo de ruptura do ponto A).

Os tempos acima referidos serão doravante representados nos gráficos subsequentes de acordo com a seguinte simbologia:

- ✓ Tempo de 100 dias: ●
- ✓ Tempo de 120 dias: ■
- ✓ Tempo de 123,52 dias: ▲
- ✓ Tempo de 125 dias: ♦
- ✓ Tempo de 130,87 dias: ★

4.2 Correlações Temporais de Longo Alcance

As Figuras 4a e 4b apresentam os correlogramas seriais amostrais (K vs R_k) do ponto A com os pontos B e 1, respectivamente, para os tempos de análise mencionados anteriormente (Ramos, 2025).

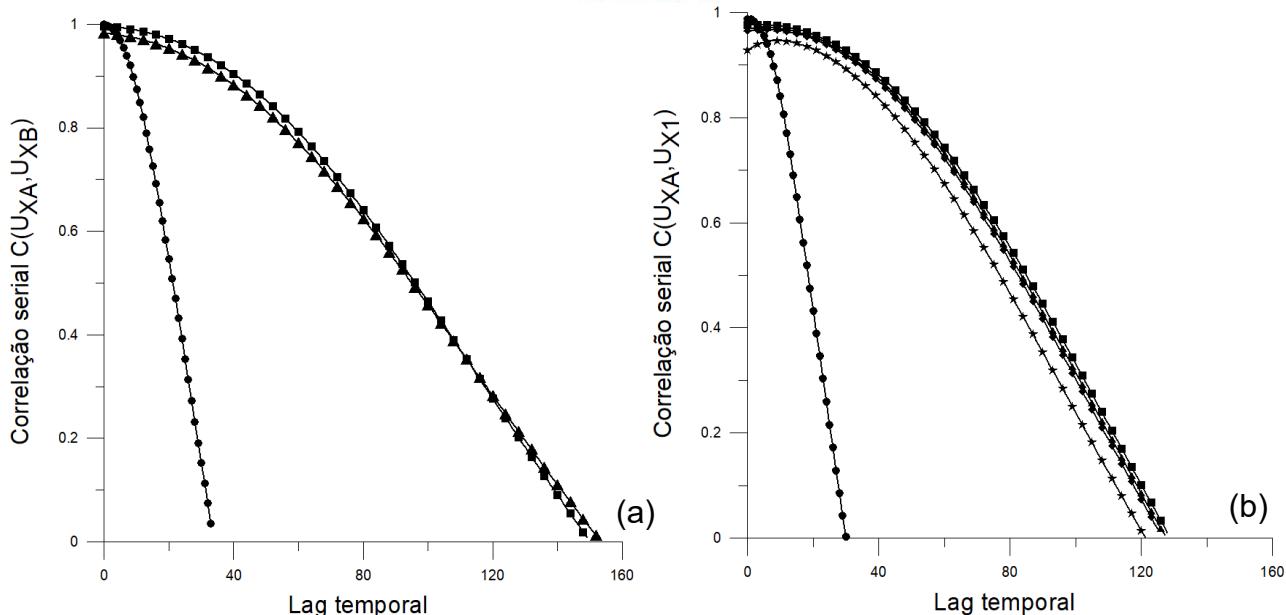


Figura 4 – (a) Correlogramas seriais amostrais envolvendo os pontos A e B (tempos analisados: 100 dias, 120 dias e 123,52 dias); (b) Correlogramas seriais amostrais envolvendo os pontos A e 1 (tempos analisados: 100 dias, 120 dias, 123,52 dias, 125 dias e 130,87 dias) (Ramos, 2025).

Pode-se observar que à medida que os tempos se aproximam do tempo de ruptura do ponto B (Figura 4a) e do ponto A (Figura 4b), os lags temporais aumentam de forma drástica, sinalizando um aumento da correlação entre os dados das séries temporais dos deslocamentos horizontais dos dois pares de pontos analisados. Ressalte-se que Ramos (2025), em seu trabalho de pesquisa, encontrou este mesmo comportamento para vários outros pontos analisados.

Segundo Bak (1996), Tsallis (2023) e Sornette (1998, 2003), correlações espaciais e temporais operam conjuntamente em sistemas complexos adaptativos, sugerindo que correlações espaciais de longo alcance também se fizeram presentes no sistema, embora não tenham sido, neste trabalho, determinadas.

Note-se também que a presença de correlações espaço-temporais de longo alcance torna o sistema extremamente frágil a qualquer perturbação interna ou externa que possa vir a ocorrer (Bak, 1996; Nussenzveig, 1999; Menezes Filho, 2003). Assim, um talude próximo da ruptura pode ser comparado a uma grande caixa de ressonância, que reverbera quaisquer perturbações atuantes no sistema, por menores e mais ínfimas que sejam, independentemente de serem previsíveis ou não.

4.3 Correlogramas Seriais Amostrais Descritos por Funções Matemáticas Generalizadas q-deformadas

Este item trata da aplicação da função q-exponencial estendida (3) aos correlogramas amostrais das Figuras 4a e 4b, envolvendo os pontos A e B, e A e 1, em função do seus respectivos lags normalizados pela variável b respectiva (resultado da aplicação da expressão (3) aos dados das Figuras 4a e 4b).

A Figura 5a apresenta os correlogramas seriais normalizados para os dados da Figura 4a, envolvendo os pontos A e B. Nela se pode observar o colapso dos dados de correlação e seu excelente ajuste pela expressão q-exponencial estendida (3) ($R^2 = 0,999055$). Note-se o valor de $q = 0,2485$ diferente de 1,0 e o expoente $\beta = 1,8949$ bastante próximo de 2,00, configurando um decaimento lento das correlações, assintoticamente em lei de potência, próxima de uma função q-gaussiana (Ramos, 2025).

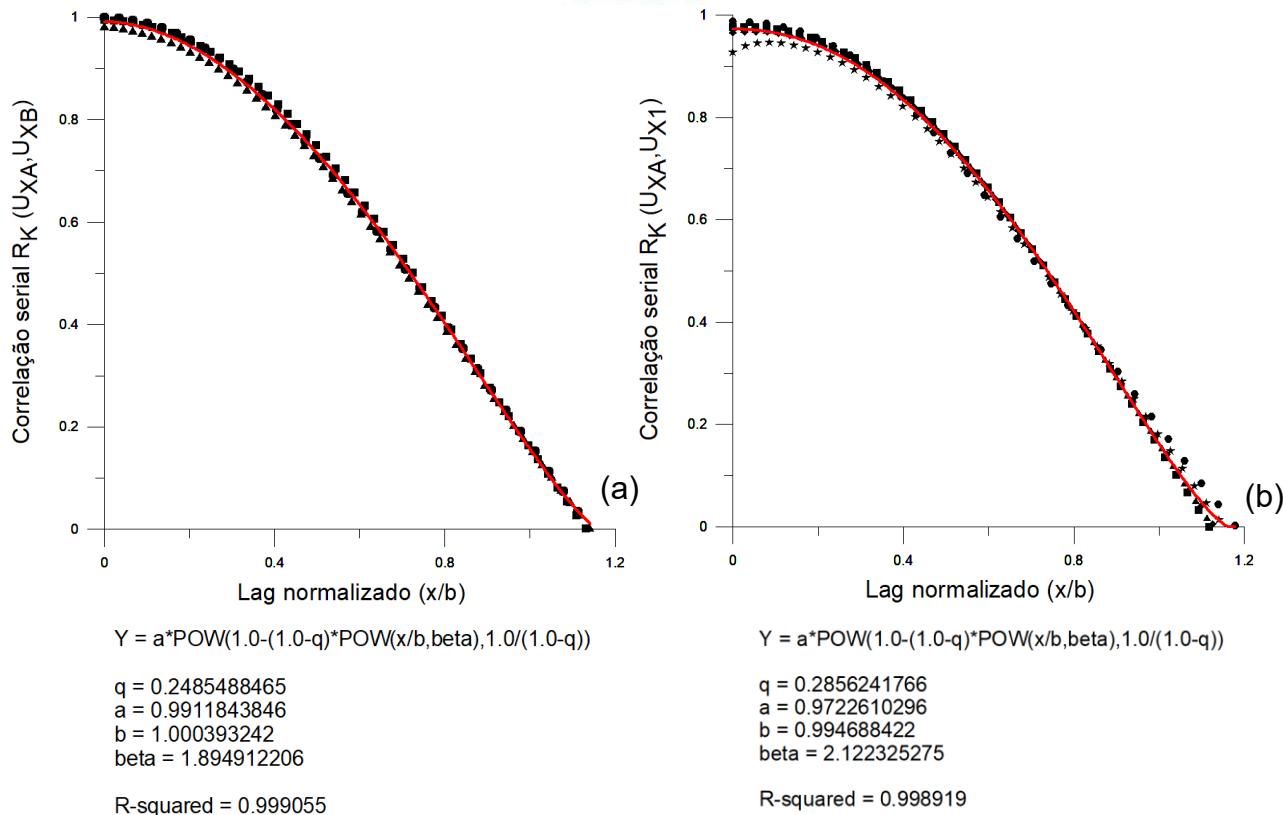


Figura 5 – (a) Correlograma serial amostral normalizado envolvendo os pontos A e B; (b) Correlograma serial amostral normalizado envolvendo os pontos A e 1. Em ambos os casos, a curva vermelha é o ajuste dos dados experimentais à expressão q-exponencial estendida (3) (Ramos, 2025).

De forma semelhante, a Figura 5b mostra o ajuste da expressão (3) aos dados de correlação normalizados da Figura 4b, envolvendo os pontos A e 1. Pode-se notar o excelente ajuste pela função q-exponencial estendida (3) ($R^2 = 0,998919$), traduzindo um decaimento lento (em lei de potência), além do colapso dos dados bastante significativo (Ramos, 2025).

Novamente, o valor de $q = 0,2856$ difere de 1,0, ao passo que o expoente $\beta = 2,1223$ situa-se muito próximo de 2,00, sinalizando novamente uma função q-gaussiana.

5 CONCLUSÕES

Os resultados experimentais sugerem fortemente a existência de correlações temporais de longo alcance entre os pontos A, B e 1, em razão do aumento significativo dos lags temporais dos correlogramas à medida que a evolução de seus deslocamentos horizontais se aproxima dos tempos de ruptura dos pontos A e B.

Uma vez que correlações espaciais e temporais operam conjuntamente, sugere-se que correlações espaciais de longo alcance também estejam acontecendo no sistema pesquisado, embora não tenham sido avaliadas neste trabalho. A função q-exponencial estendida descreveu, de forma excelente, a evolução dos correlogramas seriais em função dos lags temporais normalizados, dos pontos próximos e distantes da região instável do talude, sempre com $q \neq 1$ e expoente β muito próximo de 2,00, configurando funções q-gaussianas.

Do ponto de vista prático, os resultados indicam que análises numéricas podem antecipar comportamentos de instabilidade em taludes, fornecendo subsídios para sistemas de monitoramento e alerta precoce. Em aplicações de engenharia, isto significa que deslocamentos observados em pontos específicos podem servir como indicadores de risco para regiões mais amplas, favorecendo o planejamento de contenções, obras de infraestrutura e estratégias de mitigação em áreas urbanas e rodoviárias sujeitas a escorregamentos. Desta forma, o uso de funções q-deformadas pode ser incorporado como ferramenta complementar na previsão de ruptura e no aumento da segurança de projetos geotécnicos.



AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Prof. Evaldo Curado, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), pelas importantes e valiosas sugestões que muito contribuíram para a melhoria deste artigo. Agradecem, igualmente, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PGECIV - UERJ). Reconhecem, ainda, o apoio financeiro da FAPERJ, cuja atuação foi decisiva para a viabilização desta pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAK, P. *How nature works - the science of self-organized criticality*, Copernicus, 1996, 212p.
- BRINKGREVE, R. B. J. *Plaxis 2D – Version 8*. Netherlands: A.A Balkema Publishers, 2002.
- FUKUZONO, T. *A new method for predicting the failure time of a slope*. Proc. 4th Int. Conf. and Field Workshop on Landslides, Tokyo, p. 145-150, 1985.
- MENEZES FILHO, A. P. *Não-Extensividade Termodinâmica, Invariância Discreta de Escala e Elastoplasticidade: Estudo Numérico de um Modelo Geomecânico Auto-Organizado Criticamente*. Tese de Doutorado, Dep. de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2003, 189p.
- MORETIN, P.A., TOLOI, C.M.C. *Análise de Séries Temporais – Volume 1 - Modelos lineares univariados*, Edgar Blucher, 2018, 455p.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Introdução aos sistemas complexos*. In: Complexidade e Caos. Nussenzveig, H.M.(ed.), Ed. UFRJ, Rio de Janeiro, 276p, 1999.
- RAMOS, K. N. *Taludes próximos à ruptura: correlações espaço-temporais de longo alcance*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, PGECIV - UERJ, Rio de Janeiro, 2025 (em preparo).
- SILVA, G.R.S. *A ruptura em taludes como um fenômeno crítico auto-organizado*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, PGECIV - UERJ, Rio de Janeiro, 2023.
- SORNETTE, D. *Discrete scale invariance and complex dimensions*. Physics Reports 297, 239. 1998.
- SORNETTE, D. *Why stock markets crash? Critical events in complex financial systems*. Princeton University Press, p. 420. 2003.
- TSALLIS, C. *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*. J. Stat. Phys., 52, 479 – 487, 1988.
- TSALLIS, C. *Introduction to nonextensive statistical mechanics – approaching a complex world*. 2º Edição, Springer, 2023